Analyses de sensibilité stochastiques aux fins des rapports actuariels sur le Régime de pensions du Canada

Assia Billig,
Bureau du surintendant des institutions financières, Canada

INTERNATIONAL SOCIAL SECURITY ASSOCIATION
ASSOCIATION INTERNATIONALE DE LA SÉCURITÉ SOCIALE
ASOCIACIÓN INTERNACIONAL DE LA SEGURIDAD SOCIAL
INTERNATIONALE VEREINIGUNG FÜR SOZIALE SICHERHEIT

BPS Instituto de Seguridad Social

SÉMINAIRE TECHNIQUE POUR LES ACTUAIRES ET STATISTICIENS DE LA SÉCURITÉ SOCIALE
"Financement viable et extension de la couverture de la sécurité sociale"

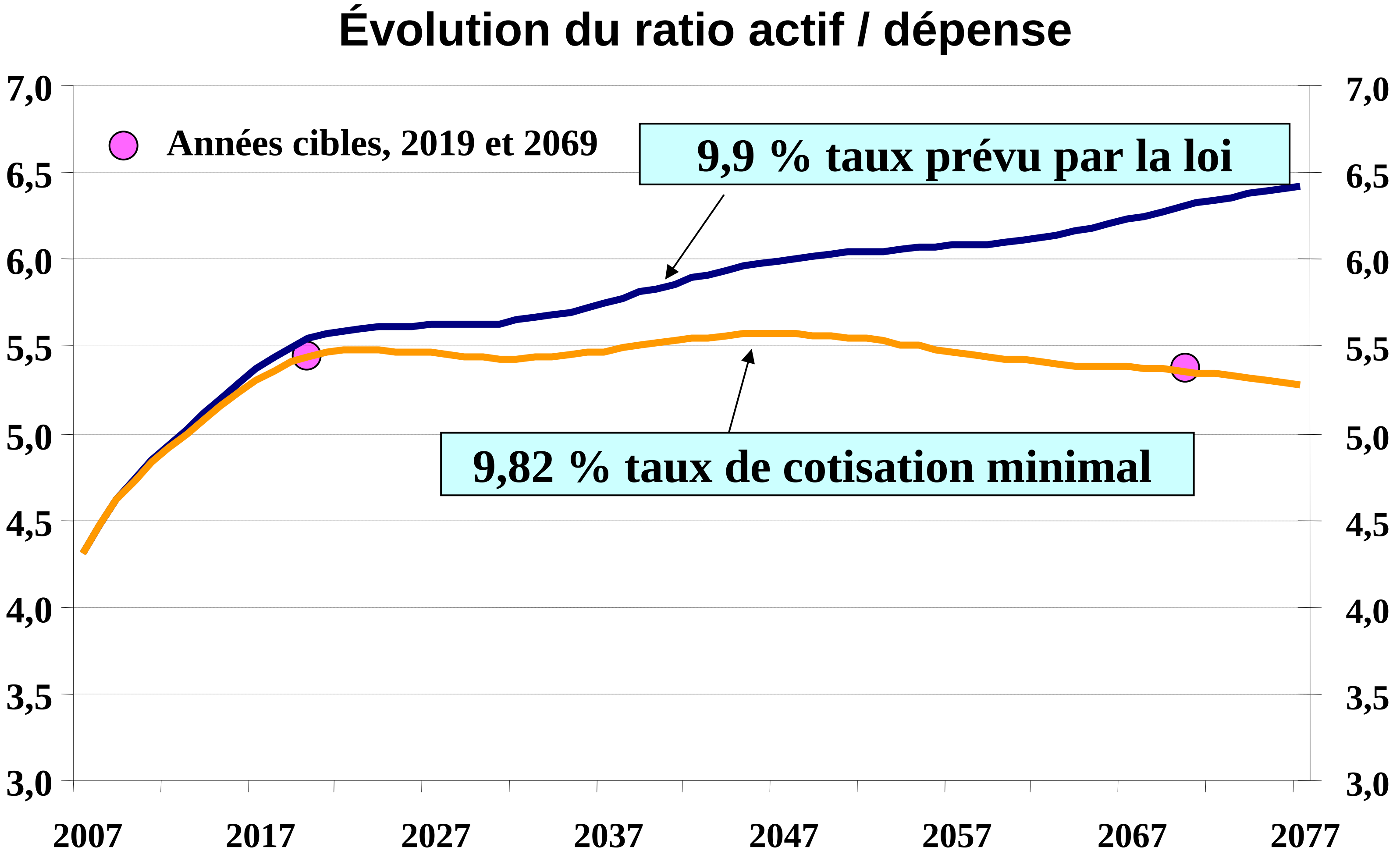
Montevideo, Uruguay, 27-28 avril 2010

Le RPC : un régime à prestations déterminées, partiellement capitalisé

<u>*Régime de pensions du Canada – le partie de deuxième palier du système de retraite canadien :*</u>

- Régimes à prestations déterminées (taux de remplacement de 25% jusqu'au limite spécifique)
- Capitalisation partielle au moyen de cotisations versées par les employés et les employeurs.
  - Objectif du financement de régime permanent : stabiliser et réduire au minimum le taux de cotisation.
  - Taux de cotisation de régime permanent : le taux le plus faible qui peut être appliqué pour assurer le maintien du Régime sans qu'il n'y ait d'augmentations.
    - Principal indicateur – ratio actif/dépenses stable
- Capitalisation pleine de la majoration des prestations futures.

Selon les hypothèses basées sur la meilleure estimation et un taux de cotisation minimal de 9,82 %, le ratio A/D se stabilise autour de 5,5



L'incertitude des résultats fait partie intégrante des rapports

- La loi oblige le RPC à produire un rapport actuariel tous les trois ans
- La période de projection est de 75 ans
- Nombre important d'hypothèses à définir

Il importe de communiquer l'incertitude entourant les résultats

- Le 23^{e} Rapport actuariel du RPC comporte à la fois des :
  - analyses par scénarios : population plus jeune/plus âgée, demi-cycle économique, volatilité des marchés financiers
  - analyses déterministes ou stochastiques de sensibilité relativement à chacune des hypothèses

Analyses par scénarios et analyses déterministes

Analyses par scénarios

– En raison de la dynamique complexe de la corrélation entre les hypothèses, il n'est pas aisé de regrouper les résultats découlant des analyses individuelles
    - Les scénarios relatifs aux populations plus jeune et plus âgée prévoient divers ensembles d'hypothèses démographiques et économiques

– Incidence à court terme des cycles économiques
    - Scénario du demi-cycle économique et scénarios portant sur volatilité des marchés financiers

– Des éléments des analyses stochastiques sont pris en compte dans l'élaboration des scénarios

Analyses déterministes

– Taux de retraite pour la cohorte âgée de 60 ans
    - Données historiques insuffisantes – la rente de retraite anticipée n'existe que depuis 1987

– Taux d'activité et taux de chômage
    - Les données historiques sur la main-d'œuvre ne tiennent pas compte des tendances futures telles que l'éventuelle pénurie de main-d'œuvre due au vieillissement de la population

Les analyses de sensibilité stochastiques indiquent aux utilisateurs des rapports la vraisemblance des résultats éventuels

- Il serait irréaliste, à cette heure, de créer pour le RPC un modèle d'évaluation qui soit entièrement stochastique
- La modélisation stochastique sert à déterminer les diverses hypothèses des analyses de sensibilité
  - Projection de la distribution de probabilité des résultats éventuels
  - Hypothèses de coût élevé et de faible coût
- Mise en garde : les résultats découlant de la modélisation stochastique sont fonction :
  - du choix du modèle
  - du choix de la période des données historiques
  - du degré d'exactitude des hypothèses relatives aux distributions de probabilité et à la corrélation entre les variables
  - de la longueur de la période de projection

L'emploi de modèles stochastiques ne doit pas embrouiller le lecteur!

Les analyses stochastiques du Bureau de l'actuaire en chef se fondent sur les modèles ARIMA(p,d,q)

- Modèles autorégressifs à moyennes mobiles intégrées – catégorie générale de modèles de prévision de séries temporelles
  - *d* = ordre de différenciation
  - *p* = nombre de termes autorégressifs
  - *q* = nombre de termes de moyenne mobile
- Par exemple : ARIMA(1,1,1)

$$\hat{Y}(t) = \mu + Y(t-1) + \varphi \times (Y(t-1) - Y(t-2)) - \theta \times e(t-1)$$

où :

  - **Y(t)** est un processus aléatoire
  - **μ** désigne une moyenne
  - **e(t)** représente un terme d'erreur aléatoire
- Variantes :
  - On peut aussi ajuster des données transformées (p. ex., log ARIMA)
  - Si d=0 et q=0, le modèle est dit *AR(p)*
  - Si seule la variable d=0, le modèle est dit *ARMA(p,q)*

Le modèle du BAC : une combinaison d'éléments stochastiques et déterministes

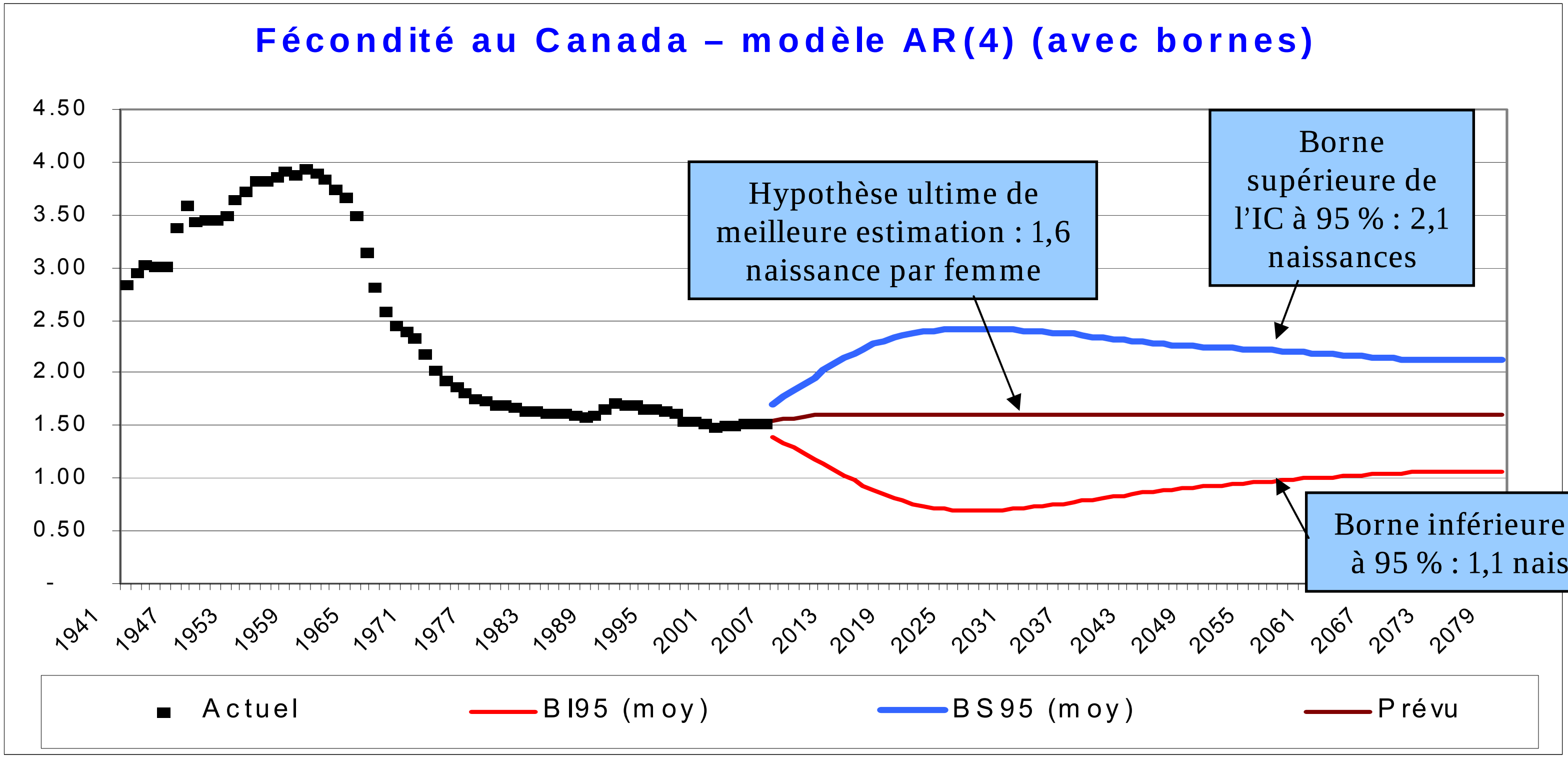
- **SAS** *(Système d'analyse statistique)* – Ajustement de modèles aux données historiques
  - Choix du modèle en fonction de statistiques sur la qualité de l'ajustement et de sa simplicité
  - Les paramètres estimés servent à produire les projections
- **Excel (macro VB)** – Permet d'exécuter de 1 000 à 20 000 scénarios stochastiques à la fois, selon le nombre de variables à l'étude
  - Chaque scénario génère une <u>erreur aléatoire</u> à l'aide de la loi normale de moyenne zéro, et dont la variance est déterminée à partir des données historiques
  - <u>Élément déterministe</u> – Les prévisions sont centrées autour de la meilleure estimation
  - <u>Scénarios stochastiques</u> produisent des intervalles de confiance et des intervalles de confiance pour la moyenne cumulative qui sont centrés autour de la meilleure estimation

Variantes du modèle pour prendre en compte la corrélation entre les hypothèses

- Si les hypothèses sont corrélées, on peut soit :
  - ajuster chacune des hypothèses séparément, mais en supposant que les termes d'erreur sont corrélés
    - La **décomposition de Cholesky** est utilisée pour mettre en corrélation les termes d'erreur
    - Exemple d'utilisation : taux de mortalité par groupe d'âges
  - utiliser un modèle vectoriel autorégressif
    - Modélisation conjointe de séries chronologiques
    - Certaines données indiquent que les données historiques de ces variables peuvent être interdépendantes d'une variable à l'autre
    - Dans les modèles de prévision stochastiques, chacune des variables estimées dépend des valeurs antérieures de l'ensemble des variables
    - Les erreurs sont mises en corrélation en utilisant la décomposition de Cholesky
    - Exemple d'utilisation : Taux de rendement des catégories d'actif et taux d'inflation

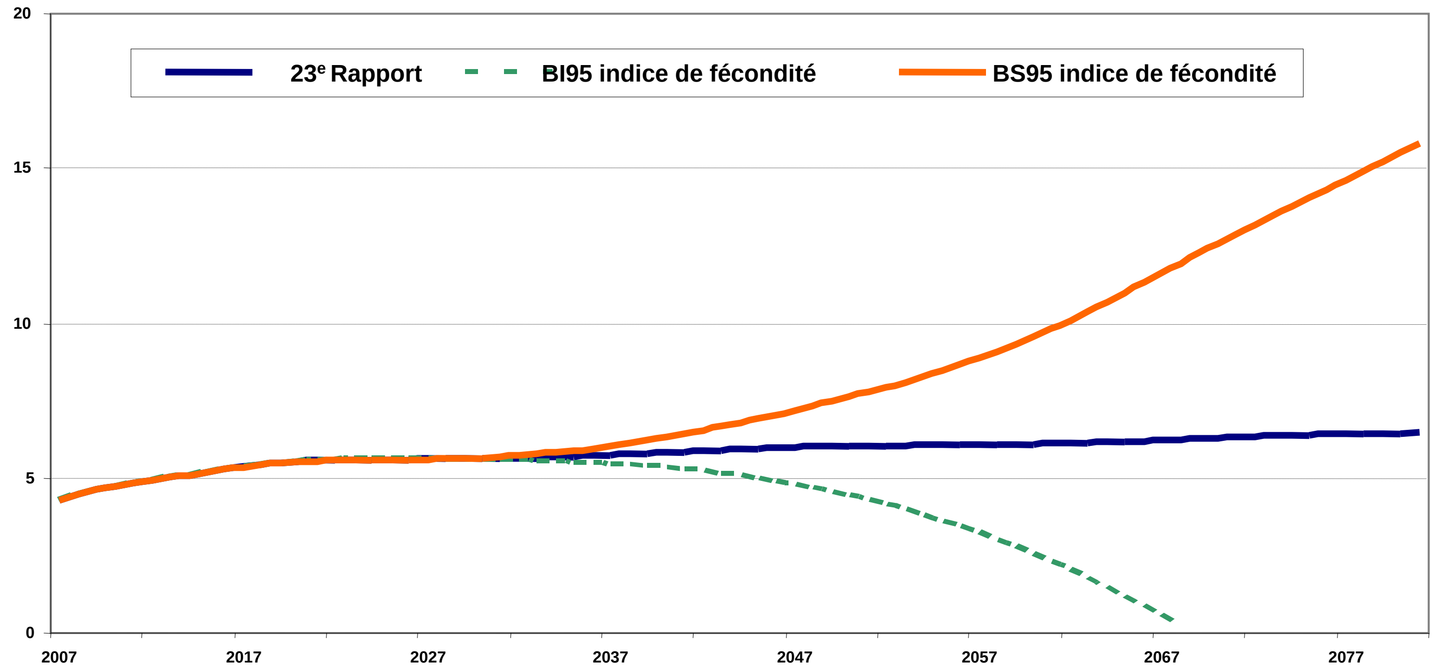
Fécondité – intervalle de confiance à 95 %

- Années 1941-2079 (projection dans le cas des années 2006-2079)
- Choix d'un modèle AR(4) : simple, bonne qualité de l'ajustement, n'atteint pas les bornes inférieure et supérieure



Selon l'hypothèse des faibles indices de fécondité, l'actif du Régime sera à sec en 2069

Évolution du ratio actif/dépenses (taux de cotisation de 9,9 %)



Le taux de cotisation minimal se situe entre 9,25 % et 10,45 %

Résultats du modèle de mortalité : intervalles de confiance pour les espérances de vie

- 40 groupes d'âges mis en corrélation en utilisant la décomposition de Cholesky :
  - Hommes et femmes / moins de 1 an, 1-4 ans, 5-9 ans, 10-14 ans,…85-89 ans, 90 ans et plus
- D'abord tenté d'ajuster un modèle aux taux d'amélioration de la mortalité
  - Mauvaise qualité de l'ajustement → nous nous sommes tournés vers les taux de mortalité (décès pour 1 000)
  - Projection des taux de mortalité et, ensuite, conversion de ceux-ci en taux d'amélioration
- Le modèle log ARIMA(0,1,0) a produit un bon ajustement pour tous les groupes d'âges, à l'exception du groupe des 90+
- Années 1926-2079 (projection dans le cas des années 2005-2079)
- Intervalles de confiance à 95 % et médianes pour les taux de mortalité, taux d'amélioration de la mortalité, et espérances de vie à la naissance et à 65 ans

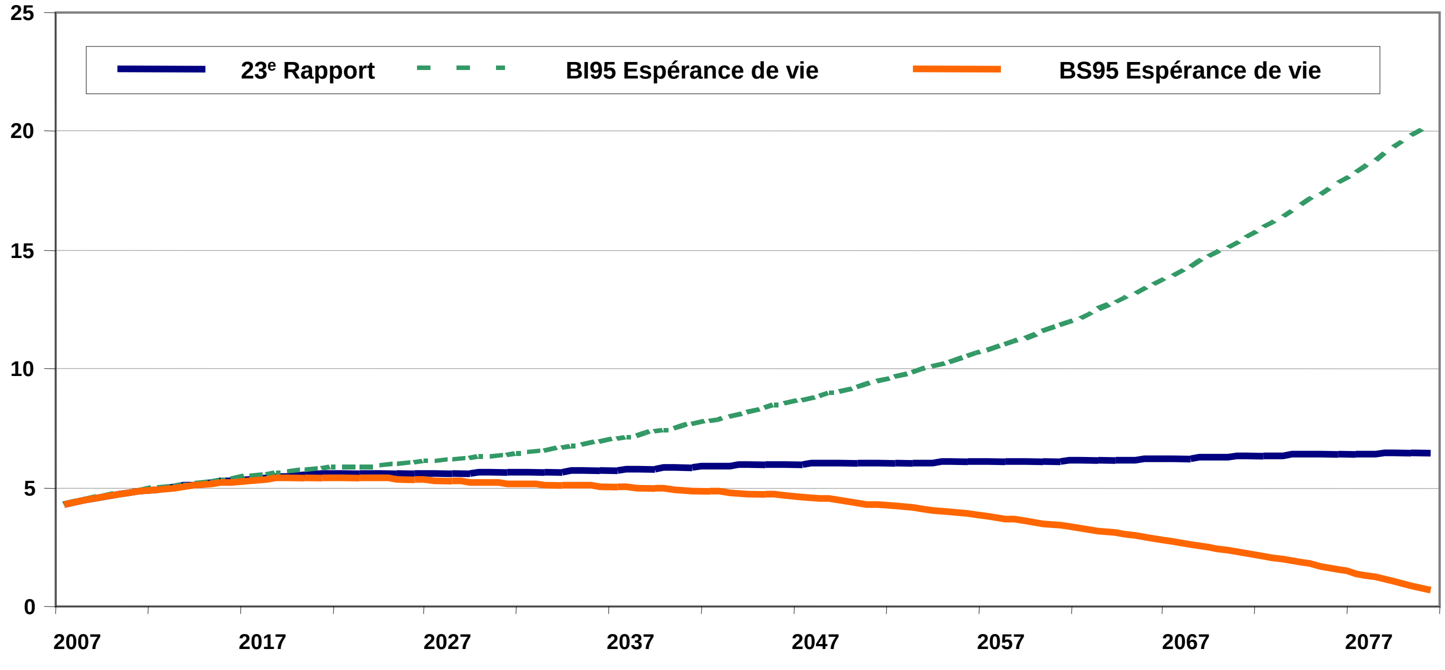
Analyse de sensibilité en utilisant le processus stochastique

Espérances de vie au Canada, avec améliorations au-delà de l'année indiquée

À la naissance		23e Rapport du RPC	Borne inférieure de l'IC à 95 %	Borne supérieure de l'IC à 95 %	Étendue
Hommes	2050	87,4	80,8	91,3	*10,5*
Femmes	2050	90,2	81,9	94,6	*12,7*
À 65 ans					
	2007	19,3	17,6	20,7	*3,1*
Hommes	2025	20,6	17,7	22,9	*5,2*
	2050	**21,9**	**17,8**	**25,1**	***7,3***
	2007	22,0	19,5	24,0	*4,5*
Femmes	2025	23,0	18,9	25,9	*7,0*
	2050	**24,2**	**18,6**	**27,9**	***9,3***

Bien que les taux de mortalité ne puissent décroître indéfiniment, leur trajectoire future pourrait entraîner une hausse du taux de cotisation

Évolution du ratio actif/dépenses
(taux de cotisation de 9,9 %)



Le taux de cotisation minimal se situe entre 9,2 % et 10,2 %

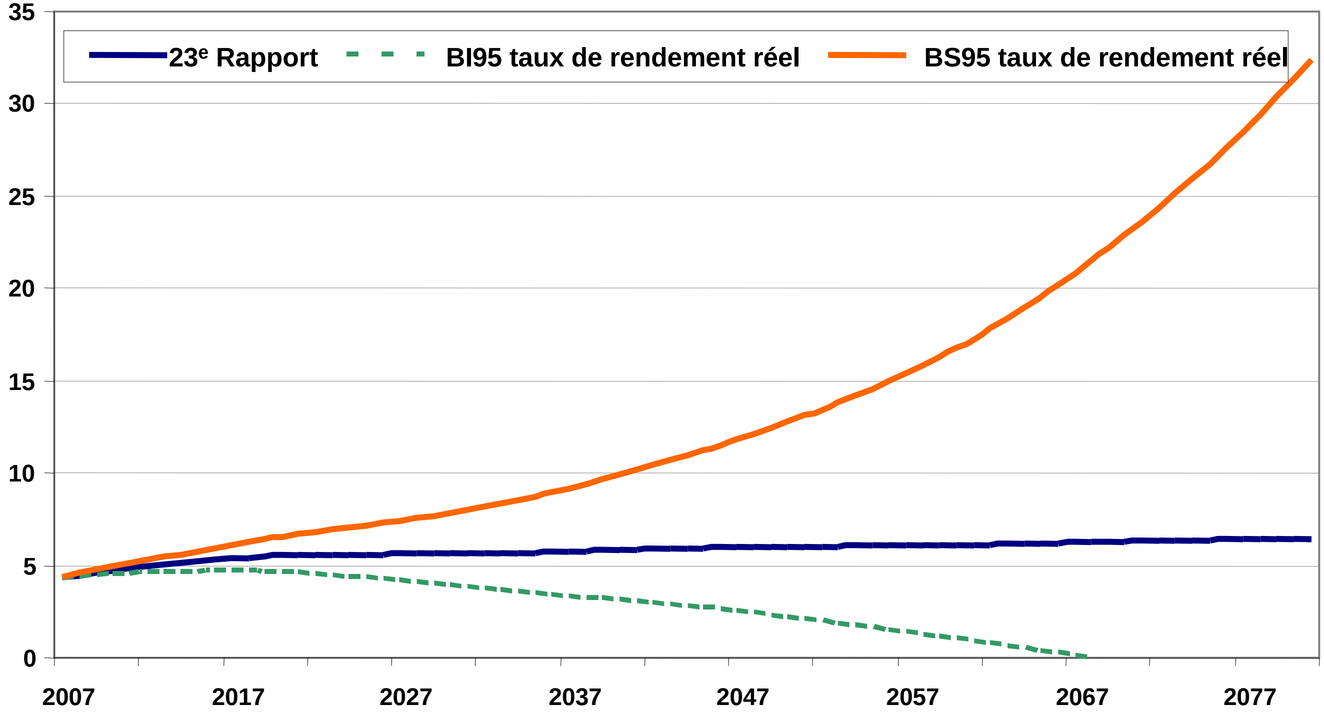
Taux de rendement réel du portefeuille – quatre variables corrélées

- Simulation des taux de rendement des actions canadiennes, des actions étrangères et des titres à revenu fixe ainsi que des taux d'inflation à l'aide d'un modèle vectoriel autorégressif à deux termes qui modélise simultanément quatre hypothèses (4VAR(2))
  - Chacune des variables au temps ***t*** est fonction des valeurs des quatre variables aux temps ***(t-1)*** et ***(t-2)***
  - Années 1938-2079 (projection dans le cas des années 2007-2079)
  - Les erreurs sont mises en corrélation en utilisant la décomposition de Cholesky
- Les projections sont centrées autour de la meilleure estimation
- Le taux de rendement nominal du portefeuille est calculé selon la répartition des actifs utilisée dans le 23e Rapport actuariel, et il est ensuite converti en un taux réel

BI de l'IC à 95 %	Meilleure estimation	BS de l'IC à 95 %
2,7 %	4,2 %	5,7 %

L'analyse de sensibilité du taux de rendement réel produit les plus grandes variations du taux de cotisation... même lorsqu'il s'agit d'un régime partiellement capitalisé

Évolution du ratio actif/dépenses (taux de cotisation de 9,9 %)



Le taux de cotisation minimal se situe entre 9,0% et 10,7 %

Conclusions et prochaines étapes

- L'application des processus stochastiques est un processus de longue haleine, et non une fin en soi
- L'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs a permis de développer des modèles plus avancés
- Recommandation du groupe d'examen relativement au 23e Rapport actuariel du RPC :

  « Nous recommandons à l'actuaire en chef de maintenir la tradition qui consiste à améliorer constamment les méthodes actuarielles, notamment :

    – effectuer des analyses stochastiques plus approfondies et prospectives;
    – élaborer des analyses de sensibilité plus vraisemblables et cohérentes pour les hypothèses clés. »
- Examiner la possibilité d'effectuer des projections simultanées des indices de fécondité et des taux de migration

Analyses de sensibilité stochastiques aux fins des rapports actuariels sur le Régime de pensions du Canada

Annexe

INTERNATIONAL SOCIAL SECURITY ASSOCIATION
ASSOCIATION INTERNATIONALE DE LA SÉCURITÉ SOCIALE
ASOCIACIÓN INTERNACIONAL DE LA SEGURIDAD SOCIAL
INTERNATIONALE VEREINIGUNG FÜR SOZIALE SICHERHEIT

Instituto de Seguridad Social

SÉMINAIRE TECHNIQUE POUR LES ACTUAIRES ET STATISTICIENS DE LA SÉCURITÉ SOCIALE
"Financement viable et extension de la couverture de la sécurité sociale"

Montevideo, Uruguay, 27-28 avril 2010

Décomposition de Cholesky

- La procédure de décomposition de Cholesky consiste à décomposer une matrice symétrique définie positive **V** en un produit de deux matrices **L** et $\mathbf{L}^T$ **(** $\mathbf{V} = \mathbf{L} \times \mathbf{L}^T$), où **L** est une matrice triangulaire inférieure, et sa transposée $\mathbf{L}^T$, une matrice triangulaire supérieure.

- Cette procédure permet de convertir des termes d'erreur aléatoire qui suivent une loi normale centrée réduite en des termes obéissant à une loi normale multidimensionnelle de moyenne nulle et dont la matrice de variances-covariances s'obtient à partir des données historiques.

- En multipliant la matrice **L** par le vecteur des termes d'erreur, on obtient un vecteur qui suit la loi normale multidimensionnelle cherchée. La matrice **V** comporte les variances et covariances des résidus, qui représentent la différence entre les points de données réels (historiques) et les points de données estimés à l'aide du modèle ARIMA choisi.

Modèle log ARIMA (0,1,0) appliqué aux taux de mortalité

- **Différence première** : Présuppose que la moyenne varie avec le temps
- **Transformation logarithmique** : Fait en sorte que les taux de mortalité approchent la valeur nulle sans toutefois jamais l'atteindre

La forme générale de l'équation utilisée se présente comme suit :

$$\ln(Y_{k,t}) = \ln(Y_{k,t-1}) + \mu_k + \varepsilon_{k,t}$$

ainsi :

$$Y_{k,t} = Y_{k,t-1}\, e^{\mu_k}\, e^{\varepsilon^{k,t}}$$

où : $Y_{k,t}$ = nombre de décès par 1 000 pour le groupe k dans l'année t

μ_k = la moyenne des séries transformées (c.-à-d. séries inscrites et différenciées)

$\varepsilon_{k,t}$ = un terme d'erreur aléatoire pour le groupe k dans l'année t

Modèle vectoriel autorégressif : mVAR(p)

Soit il y a m séries temporelles y_{it} , $i = 1,\ldots, m$, et $t = 1,\ldots, T$ (durée commune des séries temporelles). Un modèle vectoriel autorégressif se définit par :

$$\begin{pmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{mt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} & \cdots & \phi_{1m}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} & \cdots & \phi_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1}^{(1)} & \phi_{m2}^{(1)} & \cdots & \phi_{mm}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-1} \\ y_{2,t-1} \\ \vdots \\ y_{m,t-1} \end{pmatrix} +$$

$$\cdots + \begin{pmatrix} \phi_{11}^{(p)} & \phi_{12}^{(p)} & \cdots & \phi_{1m}^{(p)} \\ \phi_{21}^{(p)} & \phi_{22}^{(p)} & \cdots & \phi_{2m}^{(p)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1}^{(p)} & \phi_{m2}^{(1)} & \cdots & \phi_{mm}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1,t-p} \\ y_{2,t-p} \\ \vdots \\ y_{m,t-p} \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ \vdots \\ \epsilon_{mt} \end{pmatrix}.$$